Московский Государственный Университет Геодезии и Картографии

Кафедра высшей математики

Высшая математика (1 семестр)

Разделы

Функции. Пределы. Дифференцирование. Интегрирование.

Основные формулы по темам

Составитель *Лисеев И. А.*

Последнее редактирование: 07-10-09.

1. ПРЕДЕЛЫ

Свойства линейности предельного перехода.

Предел суммы или разности … равен сумме или разности пределов …
Постоянный множитель можно вынести за знак предела.

Предел произведения и дроби

Предел произведения равен произведению пределов … Предел отношения равен отношению пределов …

Предел степени и корня

$$\lim_{x\to\mu} (\varphi(x)^p) = [\lim_{x\to\mu} \varphi(x)]^p; \quad \lim_{x\to\mu} a^{\varphi(x)} = a^{\lim\limits_{x\to\mu} \varphi(x)}; \quad \lim_{x\to\mu} \sqrt[n]{\varphi(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to\mu} \varphi(x)}.$$

(Знак предела можно вносить под знак непрерывной функции)

$\lim_{x\to\mu}[a(x)]^{\varphi(x)} = \left[\lim\limits_{x\to\mu} a(x)\right]^{\lim\limits_{x\to\mu} \varphi(x)}$ – эта формула "работает" при вычислении пределов показательно степенных функций путем сведения их ко второму замечательному пределу.

Теорема о произведении бесконечно малой величины на ограниченную.

Произведение бесконечно малой величины на ограниченную есть величина бесконечно малая.

Некоторые пределы

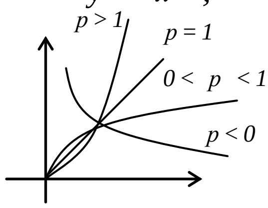
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty \quad \left(\frac{1}{0} = \infty\right), \quad \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \left(\frac{1}{\infty} = 0\right), \quad \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.}$$

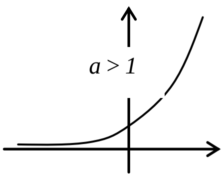
Другая запись второго замечательного предела $\boxed{\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$

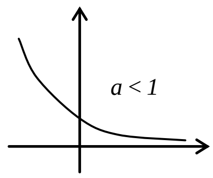
Некоторые "неопределённости" : $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, 1^∞, 0^∞, ∞^0. Обратите внимание, в этих формулах единица и нули – это не константы, так обозначены переменные величины, имеющие пределом единицу или ноль.

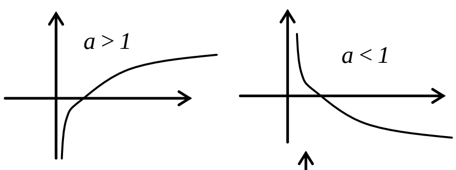
Поведение некоторых функций.

Степенные: $y = x^p$, *показательные:* $y = a^x$, *логарифмические:* $y = \log_a x$

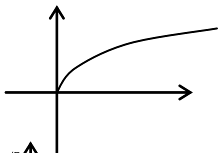


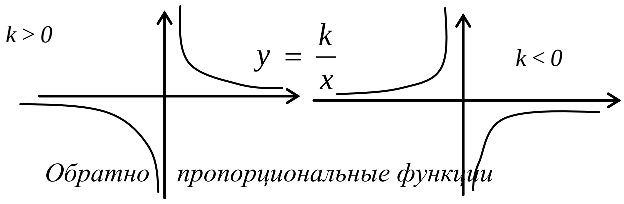






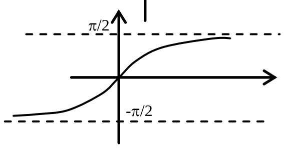
Корень квадратный: $y = \sqrt{x}$.





Обратно пропорциональные функции

Арктангенс: $y = arc\ tg\ x$.



При стремлении аргумента x к бесконечности многочлен $P_n(x)$ также стремится к бесконечности. $\lim_{x\to\infty} P_n(x) = \infty$.

Основное логарифмическое тождество: $\boxed{A = e^{\ln A}}$

Это тождество, а также свойство непрерывности показательной функции (подведение знака предела под знак показательной функции) используется при вычислении пределов показательно степенных функций:

$$\lim_{x\to\mu} a(x)^{p(x)} = \lim_{x\to\mu} e^{\ln a(x)^{p(x)}} = \lim_{x\to\mu} e^{p(x)\cdot\ln a(x)} = e^{\lim\limits_{x\to\mu} p(x)\cdot\ln a(x)} = \ldots$$

Таблица эквивалентностей

Переменные величины $p(x)$ и $\varphi(x)$ называются эквивалентными при $x \to \mu$, если $\lim_{x\to\mu}\frac{p(x)}{\varphi(x)} = 1$.

Понятие эквивалентности применяют для сравнения как бесконечно малых величин, так и для сравнения бесконечно больших величин. При вычислении пределов используют следующее практическое правило: предел произведения или отношения каких-то величин не изменится, если эти величины заменять величинами, им эквивалентными.

При стремлении аргумента к бесконечности (при $x \to \infty$) многочлен

$$P_n(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$$

эквивалентен своему старшему члену: $P_n(x) \sim a_n \cdot x^n$.

Эта эквивалентность сохраняется, даже когда n – не целое, но положительное.

Ещё некоторые примеры эквивалентности бесконечно больших при $x \to \infty$:

$\sqrt{x+c} \sim \sqrt{x}$, $\ell n\,(x+c) \sim \ell n\, x$. Эти эквивалентности всё время используются при исследовании рядов на сходимость. Это у нас будет на втором курсе.

Эквивалентность некоторых бесконечно малых при стремлении аргумента $\alpha \to 0$.

$\sin\alpha \sim \alpha$	$tg\,\alpha \sim \alpha$	$\arcsin\alpha \sim \alpha$	$arctg\,\alpha \sim \alpha$
$1 - \cos\alpha \sim \dfrac{a^2}{2}$	$e^{\alpha} - 1 \sim \alpha$	$c^{\alpha} - 1 \sim \ldots \ldots$	$\ln(1+\alpha) \sim \alpha$
$(1+\alpha)^p - 1 \sim p \cdot \alpha$	В частности:	$\sqrt{1+\alpha} - 1 \sim \ldots$	$\dfrac{1}{1+\alpha} - 1 \sim \ldots$

Многоточиями здесь я хотел показать, что эти формулы не надо зазубривать, а надо уметь писать их на основе предыдущих формул.

2. ТОЧКИ РАЗРЫВА.

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если :

1) (первое определение непрерывности) если предел функции в этой точке равен значению функции в этой точке, т.е. $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Рис.

2) (второе определение непрерывности) если в этой точке бесконечно малому приращению функции соответствует бесконечно малое приращение аргумента, т.е. $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. Рис

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки x_0. При этом в самой точке x_0 функция может быть определена, но может быть и не определена. Точка x_0 называется *точкой разрыва* функции $f(x)$, если не выполняется условие $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Это условие может не выполняться по следующим причинам: 1) функция $f(x)$ не определена в точке x_0, 2) предел функции $f(x)$ в точке x_0 не равен значению функции в этой точке , 3) хотя бы один из односторонних пределов функции $f(x)$ в точке x_0 не существует или бесконечен.

Точка разрыва x_0 называется *точкой разрыва первого рода*, если в этой точке пределы функции слева и справа существуют и конечны.

Если хотя бы один из этих односторонних пределов не существует или бесконечен, то точка разрыва называется *точкой разрыва второго рода*.

Признак точки разрыва. Если функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки x_0, а в самой точке x_0 – не определена, то x_0 является точкой разрыва. (Этот признак формулирует достаточное условие точки разрыва)

Рисунки …

1) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ 2) $f(x) = sign\, x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \\ -1, & \text{если } x < 0 \end{cases}$ – пределы $f(x)$ в точке разрыва слева и справа существуют и конечны.

3) $f(x) = \frac{1}{x}$ 4) $f(x) = 2^{1/x}$ – хотя бы один из односторонних пределов функции $f(x)$ в точке разрыва не существует или бесконечен.




3. ТЕХНИКА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Определение производной для функции $f(x)$ в точке x:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Геометрический смысл производной:

$$f'(x) = k = tg\,\varphi\ .$$

Здесь Δy – это приращение функции $y = f(x)$ в точке x, соответствующее приращению аргумента Δx.

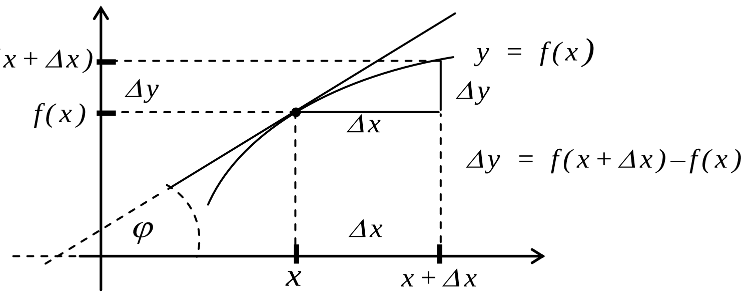


Таблица производных для "простых" функций	для "сложных" функций
Аргумент x – независимая переменная. $x' = 1$	*Аргумент сам является функцией* $u = u(x)$. $u' \neq 1$ *(если $u \neq x$)*
$(x^p)' = p\cdot x^{p-1}$	$(u^p)' = p\cdot u^{p-1}\cdot u'$
$(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$	$(\frac{1}{u})' = -\frac{1}{u^2}\cdot u'$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^u\cdot u'$
$(a^x)' = a^x\cdot \ln a$	$(a^u)' = a^u\cdot \ln a\cdot u'$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{1}{u}\cdot u'$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x\cdot \ln a}$	$(\log_a u)' = \frac{1}{u\cdot \ln a}\cdot u'$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u\cdot u'$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -\sin u\cdot u'$
$(tg x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(tg u)' = \frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$
$(ctg x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(ctg u)' = -\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
$(arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(arctg u)' = \frac{1}{1+u^2}\cdot u'$
$(arcctg x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$(arcctg u)' = -\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$

Некоторые правила дифференцирования

c – *постоянная*, $c' = 0$.

$u = u(x)$, $v = v(x)$.

Свойства линейности.

$$[u \pm v]' = u' \pm v'$$

$$[c\cdot u]' = c\cdot u';\quad [\frac{u}{c}]' = \frac{1}{c}\cdot u'$$

$$[c + u]' = u',\ \text{т.к. } c' = 0.$$

Производная произведения и частного функций.

$$(u\cdot v)' = u'\cdot v + v'\cdot u$$

$$(\frac{u}{v})' = \frac{u'\cdot v - v'\cdot u}{v^2}$$

Правило дифференцирования сложной функции.

Если $y = y(u)$, $u = u(x)$, то

$$y'_x = y'_u\cdot u'_x.$$

Вычисление производной показательно-степенной функции

$$y = \varphi(x)^{p(x)}.$$

Первый способ (с использованием основного логарифмического тождества):

$y = e^{\ln\ldots}$, $y' = \ldots$

Второй способ (с предварительным логарифмированием):

$\ln y = \ln \varphi(x)^{p(x)}$ ... ...

Вычисление производной функции, заданной неявно.

$F(x,y) = 0;$ $y' = ?$

Дифференцируем имеющееся соотношение, помня, что $y = y(x)$ **!**

Производная функции, заданной параметрически …

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

Дифференциал: если $y = y(x)$, то $\mathbf{dy = y'\cdot dx}$, где $dx = \Delta x$.

При малых Δx имеет место приближённое равенство: $dy \approx \Delta y$.

4. ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

Формула линеаризации: $\boxed{f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)}$ (при x, близких к x_0)

Уравнение касательной $y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$. Уравнение нормали … $y = f(x_0) - \dfrac{1}{f(x_0)}(x - x_0)$

Алгебраический смысл дифференциала. Дифференциал приближённо равен приращению функции.

$$dy = y'\cdot\Delta x \approx \Delta y.$$

Замечание. Приближённые равенства для функции (формула линеаризации) и для приращения функции ($\Delta y \approx dy$) будут тем точнее, чем ближе наша функция к линейной функции в рассматриваемой точке x_0 и чем ближе x к x_0 (чем меньше $\Delta x = x - x_0$). Геометрический смысл дифференцируемости.
Дифференцируемость функции означает существование касательной к графику этой функции.

Правило Лопиталя (для раскрытия неопределённостей $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$): $\lim\limits_{x \to \mu} \dfrac{\varphi(x)}{p(x)} = \lim\limits_{x \to \mu} \dfrac{\varphi'(x)}{p'(x)}$.

Формула Тейлора (главная формула дифференциального исчисления):

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\cdot(x - x_0) + \dots\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x - x_0)^n + R_n(x, x_0)}$$

Формула Маклорена … $f(x) = f(0) + \dfrac{f'(0)}{1!}\cdot x + \dots\dots + \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n + R_n(x)$

Формулы Маклорена для конкретных функций	
	$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dots \quad .. + \dfrac{x^n}{n!} + R_n$,
	$ln\,(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dots \quad .. + (-1)^{n+1}\cdot\dfrac{x^n}{n} + R_n$
	$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dots \quad .. + (-1)^n\cdot\dfrac{x^{2n}}{(2\cdot n)!} + R_{2n}$
	$\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dots \quad .. + (-1)^n\cdot\dfrac{x^{2n+1}}{(2\cdot n + 1)!} + R_{2n+1}$

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ …

Признак точки разрыва. Если в некоторой проколотой окрестности точки $x = c$ функция $f(x)$ определена, а в самой точке $x = c$ не определена, то $x = c$ – точка разрыва функции $f(x)$.

Асимптоты. Вертикальные асимптоты могут быть "в точках" разрыва и на границе области определения функции. Невертикальные асимптоты для графика функции $y = f(x)$ описываются уравнением

$$y = kx + b, \quad \text{где} \quad k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{и} \quad b = \lim_{x \to \pm\infty} [\,f(x) - kx\,].$$

Невертикальные асимптоты могут быть правыми (при $x \to +\infty$) и левыми (при $x \to -\infty$). Если k или b равно ∞ или не существует, то не существует и асимптоты.

Первая производная: возрастание, убывание, точки экстремума.

$$f'(x) > 0 \;\Rightarrow\; f(x) \text{ возрастает}; \qquad f'(x) < 0 \;\Rightarrow\; f(x) \text{ убывает}.$$

Вторая производная: выпуклость, вогнутость, точки перегиба.

$$f''(x) < 0 \;\Rightarrow\; \text{график выпуклый}; \qquad f''(x) > 0 \;\Rightarrow\; \text{график вогнутый}$$

План исследования функций…

1. Найти $\boxed{\textit{область определения}}$ функции.
2. Выявить (если они есть) $\boxed{\textit{закономерности}}$ функции (и графика):
   1) функция четная (график симметричен относительно оси Oy) или функция нечетная (график симметричен относительно начала координат), или функция общего вида (нет симметрий, как в предыдущих случаях),
   2) функция периодическая или непериодическая.
3. Вычисляя $\boxed{\textit{пределы}}$, исследовать точки разрыва, найти асимптоты. И уже следует начать (пока схематично) строить график. Можно ещё посмотреть, как ведёт себя функция на границе области определения и на бесконечности (при $x \to \pm\infty$)
4. Вычислить $\boxed{\textit{первую производную}}$. Найти критические точки функции (где первая производная равна нулю или терпит разрыв). Указать интервалы возрастания и убывания функции. Указать точки максимума и минимума.
5. Вычислить $\boxed{\textit{вторую производную}}$. Найти точки, где вторая производная равна нулю или терпит разрыв. Указать участки выпуклости и вогнутости графика. Указать точки перегиба.
6. Вычислить координаты $\boxed{\textit{характерных точек графика}}$ (пересечения с осями координат, а также точки, где первая и вторая производная равны нулю или терпят разрыв).
7. Аккуратно и, по возможности, точно нарисовать $\boxed{\textit{график}}$ функции, отметив на нём характерные точки.

Чтобы получить более точный график можно "посчитать" и нанести на график ещё несколько точек.

5. ПЕРВООБРАЗНЫЕ

***Первообразной** для функции $f(x)$* называется такая функция $F(x)$, производная от которой равна функции $f(x)$: $F'(x) = f(x)$. Если у функции $f(x)$ есть хоть одна первообразная, то у неё есть бесчисленное множество первообразных.

Если $F(x)$ – одна из первообразных для функции $f(x)$, то всё множество её первообразных описывается выражением: $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная.

Всё множество первообразных $F(x) + C$ для функции $f(x)$ называется ***неопределённым интегралом*** для этой функции и обозначается $\int f(x)\,dx$. Таким образом,

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C}.$$

При вычислении неопределённых интегралов (первообразных) постоянный множитель можно вынести за знак интеграла, интеграл от суммы (разности) функций равен сумме (разности) интегралов.

Иногда символом $\int f(x)\,dx$ обозначают только какую-либо одну первообразную для функции $f(x)$.

И мы в таблице первообразных указываем только одну первообразную, а не всё их множество.

Таблица первообразных

Для "простых" функций (аргумент x – независимая переменная).	Для "сложных" функций (аргумент сам является функцией) $u = u(x)$.
$\int dx = x$	$\int du = u$
$\int x^p\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1}$	$\int u^p\,du = \frac{u^{p+1}}{p+1}$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert$	$\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert$
$\int e^x\,dx = e^x$	$\int e^u\,du = e^u$
$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}$	$\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a}$
$\int \cos x\,dx = \sin x$	$\int \cos u\,du = \sin u$
$\int \sin x\,dx = -\cos x$	$\int \sin u\,du = -\cos u$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$	$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$	$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$	$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u$
$\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x$	$\int \frac{du}{u^2+1} = \operatorname{arctg} u$

Таблица подведения под знак дифференциала

$$dx = d(x \pm c)$$
$$dx = -d(-x)$$
$$dx = \frac{1}{k}\cdot d(k\cdot x)$$
$$dx = k\cdot d\left(\frac{x}{k}\right)$$
$$x\cdot dx = \frac{1}{2}d\,x^2$$
$$e^x\,dx = de^x$$
$$\frac{dx}{x} = d\ln x$$
$$\cos x\cdot dx = d\sin x$$
$$\sin x\cdot dx = -d\cos x$$
$$\frac{dx}{\cos^2 x} = d\operatorname{tg} x$$
$$\frac{dx}{\sin^2 x} = -d\operatorname{ctg} x$$
$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d\arcsin x$$
$$\frac{dx}{x^2+1} = d\operatorname{arctg} x$$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}$	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a}$
$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$	$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\cdot\operatorname{arctg}\frac{u}{a}$
$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\cdot\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert$	$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\cdot\ln\left\lvert\frac{u-a}{u+a}\right\rvert$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\lambda}} = \ln\lvert x+\sqrt{x^2+\lambda}\rvert$	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+\lambda}} = \ln\lvert u+\sqrt{u^2+\lambda}\rvert$

Формулы интегрирования совершенно одинаковые, что для простых функций, что для сложных. Этот факт называется свойством инвариантности формул интегрирования.

6. НЕКОТОРЫЕ ПРАВИЛА И ФОРМУЛЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Свойства линейности для первообразных (для неопределённого интеграла) и для определённого интеграла.
Интеграл от суммы или разности функций равен сумме или разности интегралов от этих функций. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла. И постоянный множитель можно внести под знак интеграла. (Во всяком случае, если этот постоянный множитель отличен от нуля)
Свойство аддитивности интеграла по области интегрирования ……

Замена переменной при интегрировании. 1. Надо иметь соотношение между старой и новой переменными: $x = x(t)$ или $t = t(x)$.	2. Надо получить соотношение между дифференциалами: $dx = \dots dt$ или $dt = \dots dx$. 3. Если мы вычисляем определённый интеграл, то надо пересчитать пределы изменения переменной.	4. От исходного интеграла надо перейти к интегралу с новой переменной. 5. Теперь надо вычислить интеграл с новой переменной. 6. Если мы вычисляем неопределённый интеграл, то надо вернуться к старой переменной.
.Формула интегрирования по частям:	$\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du$	$\int_a^b u\cdot dv = u\cdot v\Big\vert_a^b - \int_a^b v\cdot du$
Определение определённого интеграла	$\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \text{все } \Delta x_i\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x_i$	

Формула Ньютона – Лейбница
(главная формула интегрального исчисления):

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big\vert_a^b = F(b) - F(a)}$$

Формула прямоугольников	$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i$	Рисунок
Несобственные интегралы по бесконечному промежутку интегрирования	$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \overset{\text{опр}}{=}$ … … …	
Несобственные интегралы от неограниченных функций $(\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty)$	$\int_a^{b} f(x)\,dx \overset{\text{опр}}{=}$ … … …	

<u>*Замечание.*</u> При вычислении несобственных интегралов иногда используют следующие краткие обозначения. Если $f(\mu)$ не определено, то под записью $f(\mu)$ понимают $\lim\limits_{x\to\mu} f(x)$, где μ и $f(\mu)$ могут быть конечными или бесконечными определённого знака.
При такой договорённости для несобственных интегралов тоже можно писать формулу Ньютона-Лейбница.

==== При вычислении интегралов часто приходится разбивать подынтегральную функцию на сумму двух (или нескольких) слагаемых. В простейшем случае почленного деления числителя на знаменатель "работает" школьная формула $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$.

При вычислении интеграла от рациональной дроби надо прежде всего выделить в этой дроби целую часть (если эта дробь – неправильная). Здесь мы тоже подынтегральную функцию разбиваем на сумму .

$$\underbrace{\frac{\text{мн}-\text{н}}{\text{мн}-\text{н}}}_{\text{неправ. рац. дробь}} = \underbrace{\text{мн}-\text{н}}_{\text{целая часть}} + \underbrace{\frac{\text{мн}-\text{н}}{\text{мн}-\text{н}}}_{\text{прав. рац. дробь}}$$

7. ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛА

Вычисление площадей …

Вычисление длин дуг кривых ….

Вычисление объёма тела по известным площадям его параллельных сечений …

8. "НЕБЕРУЩИЕСЯ" *ИНТЕГРАЛЫ*

$$\int e^{-x^2}\,dx\ ; \qquad \int \frac{\cos x}{x}\,dx ; \qquad \int \sqrt{x}\,\cos x\,dx ; \qquad \int \frac{x}{\ln x}\,dx \quad \ldots$$

9. НЕКОТОРЫЕ ФОРМУЛЫ ТРИГОНОМЕТРИИ.

Основное тригонометрическое тождество … -Формулы двойного аргумента.

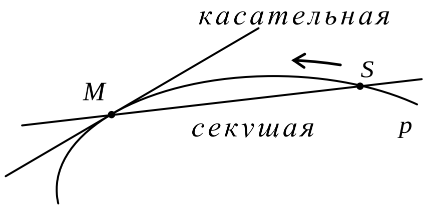
Формулы понижения степени …

Преобразование произведений в сумму …

Для универсальной тригонометрической подстановки $tg\frac{x}{2} = t$ нужны формулы, выражающие $\cos x,\ \ \sin x,\ \ tg\ x$ через тангенс половинного аргумента. Я, правда, такие примеры двоечникам, да и троечникам, не даю. Более простых примеров им вполне хватает.

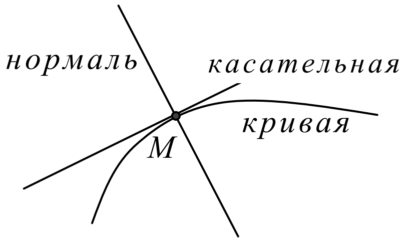
10. КАСАТЕЛЬНАЯ И НОРМАЛЬ

График функции может быть гладкой (плавной) кривой, а может иметь "изломы". Там, где график – гладкая кривая, там в каждой точке графика можно провести касательную. А в точке излома касательную провести нельзя.



<u>Определение касательной к кривой.</u> Рассмотрим точки M и S на кривой L и секущую MS. Пусть точка M фиксирована, а точка S (по кривой p) неограниченно приближается к точке M.

Касательной к кривой p в точке M называется предельное положение секущей MS при стремлении точки S по кривой L к точке M.

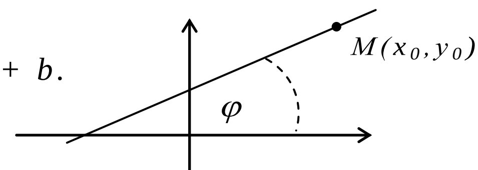


Нормалью к кривой в точке M называется прямая, перпендикулярная касательной к этой кривой в точке M.

Прямая на плоскости.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом : $y = k\cdot x + b.$

$(k = tg\,\varphi$ – угловой коэффициент прямой$)$



Уравнение прямой, проходящей через точку $(x_0,\ y_0)$, с угловым коэффициентом k: $y = y_0 + k\cdot(x - x_0).$

<u>Уравнения касательной и нормали</u> к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0,\ y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$.

Ур. касательной: $y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0).$ Ур. нормали: $y = f(x_0) - \dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

== = От обычного задания функции $y = f(x)$ легко перейти к параметрическому: $\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$.

<u>Вектор касательной</u> к кривой $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ находится так : $\vec{\tau}\ (x'_t\,, y'_t)$. Вектор нормали можно найти из условия перпендикулярности . . . .

The End